力学ICD演習解答例
演習6

1. 質量mの質点が、$U(x)=\frac{1}{4}Dx^4$ なるポテンシャルの場の中で１次元運動をする。（Dは正の定数）。この時、以下の問に答えよ。

(1) このポテンシャルに対応する力を求めよ。**（答）**$F(x)=-Dx^3$

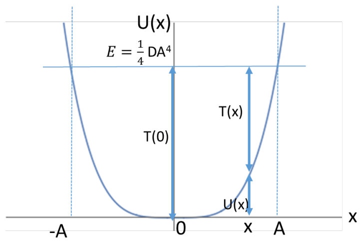
(2) $x=A$ の点で静かに質点を離した。全力学的エネルギーはいくらか。

(解答例) $x=A$ の点では$\mathbf{v}=0$ なので、全力学的エネルギー $E=\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2+\frac{1}{4}Dx^4=\frac{1}{4}DA^4$　　**答** $E=\frac{1}{4}DA^4$

(3) 質点はその後、どのような運動をするかをのグラフを書いて論じたい。以下の設問に答えよ。

a. $U(x)=\frac{1}{4}Dx^4$のグラフ上のある点 x において、全エネルギー、運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーに対応するのはどの部分かグラフに書き込め。

（解答例）右図に示す。ただし、全エネルギーをE、運動エネルギーをT、ポテンシャルエネルギーをUとした。



b. それらの物理量は x でどう変わるか。

（解答例）x=Aでは運動エネルギーTは0となりEはすべてポテンシャルU=1/4　DA⁴になる。xが小さくなっていくとTは次第に大きく、Uは小さくなっていく。x=0になると、U=0となり、Eは全て運動エネルギーになる。x<0になると、次第にTは小さくなりUは大きくなっていく。x=－AでT＝０となりEは全てポテンシャルU=1/4 DA⁴に変わる。

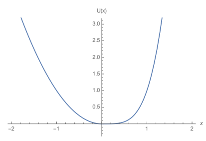
c. 質点が受ける力と$U(x)$ 曲線の傾きの関係を述べよ。**（解答例）**$F=-\frac{\partial U(x)}{\partial x}$ なので、x>0ではF<０、x<0ではF>0．ポテンシャルはxが原点より離れるほど傾きが大きくなるので、Fも大きくなる。結局、復元力になっているが、調和振動子とはその大きさが異なる。（$F(x)=-Dx^3$）

d. x で速度はどう変わるか。（静止する点、速度が一番早くなる点、その速度は？）

（解答例）静止する点は運動エネルギー(T)が０の点であるので $x=\pm A$ 、速度が一番早くなる点はTが最大の点なので、$x=0$. その時の速度は、 Eが全てTになることより E=1/2 mv²=1/4 DA⁴ より $|v|=\sqrt{\frac{D}{2m}}A^2$

e. この質点の運動が振動かどうかを判定しなさい。

（解答例）Aで静かに手を離すと、質点は速度を上げながら原点方向に向かう。原点で最大の速度を持つが、原点を過ぎると、次第に速度が落ち、x=-Aで静止する。その後、逆に原点方向に向かって加速されて行き、原点をすぎると減速してx=Aで静止する。この後はこの<u>周期的な運動が繰り返されるので、振動と言える</u>。<u>ただし、単振動ではない。上のポテンシャルの図から原点付近で速度の変化は調和振動子より小さいが、離れると急激に大きくなることがわかる</u>（実際、復元力の形がフックの法則に従わずxの３乗に比例するような非線形振動である。）



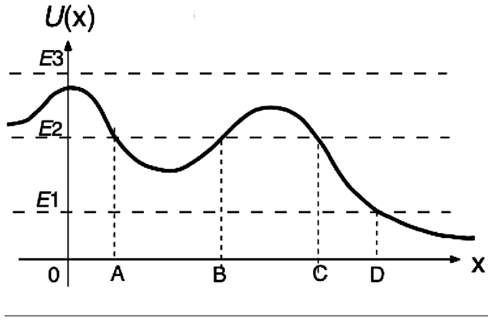
f. もし、このポテンシャルの$x<0$での形が正の領域と異なった傾きになっていた場合（例えば、$x<0$ で　$U(x)=\frac{1}{2}$ Kx²)　、この質点の運動はどう変わるか。

（解答例）右上の図はD=1の時のポテンシャルの形。x＞０の領域では上で示した運動となる。x<0では「調和振動子」と同じように減速が起こり、$U(x)=$ 1/2 Kx²= 1/4 DA^4 を満たす点で静止し、周期運動を繰り返す。ここで、静止する点は、$x=-\sqrt{\frac{D}{2K}}A^2$　結局、x>0とx<0で振幅が異なる周期運動（振動）となる。

<u>**このようにUが非対称であっても、E=一定の線とUとの交点で閉じ込られ領域があれば、質点は振動をする（一般に単振動とはならない）。**</u>

2. 図のような１次元のポテンシャルの場 $U(x)$ があったとする。力学的エネルギーEがE1、E2、E3の場合の運動を以下の問いに従って論ぜよ。

(1) E = E1の場合、＋∞からやってきた粒子の運動
(2) E = E2の場合、運動可能な領域はどこか。
それらの領域での運動についてそれぞれ述べよ
(3) E = E3の場合、＋∞からやってきた粒子の運動



（解答例）

(1) ポテンシャルは図の外側（x軸正の方向）では単調にゼロに漸近していくと仮定する。＋∞からやって来た粒子の運動エネルギーはD点に向かってしだいに小さくなるので減速していき、D点で静止する。しかし、その点でUの傾きは負なので、x軸正の方向に力が働いている。このため、粒子はx軸正の方向に加速を始め去っていく。無限遠方では、運動エネルギーは $T=\frac{1}{2}mv^2=E_1$ なので、無限大遠方で $v=\sqrt{\frac{2E_1}{m}}$ の速度を持っている（戻ってこない事に注意）。

(2) 運動可能な領域は、運動エネルギー は正の領域（$T\geq 0$）なので、$A\leq x\leq B$ 、$C\leq x\leq +\infty$ の二つの領域で運動可能。$A\leq x\leq B$ の領域では、A点とB点の間で振動する。$C\leq x\leq +\infty$ の領域では、EがE1の時と同様に、＋∞からやって来た粒子は減速し、C点で静止、その後加速が始まり、無限遠方まで去っていく。無限大遠方で $v=\sqrt{\frac{2E_2}{m}}$ の速度を持っている（戻ってこない）。

(3) ポテンシャルは図の外側（x軸正の方向と負の方向）では単調にゼロに漸近していくと仮定する。全てのxで運動エネルギー は正であるから、全領域で運動可能である。＋∞からやってきた粒子は、B点とC点の間のUの極大点(a点とする）に向かって減速していくが、a点で速度は０にはならず、a点を越えると今度は加速に転ずる。A点とB点の間の極小点（b点とする）で決まる速度まで上がったのち、x＝０付近のUの極大点(c点とする）に向かって再び減速していく。c点を越えると、再度加速が始まり、負の無限大遠方に去っていく。負の無限大遠方で $v=-\sqrt{\frac{2E_3}{m}}$ の速度を持っている（戻ってこない）。

3. １次元の調和振動子の周期 T' をポテンシャルの積分から求める。ただし、バネ定数をk 質点の質量をmとする。

(1) 次の積分 I の値が πであることを示せ。（ヒント：$x=A\sin\theta$ と置く。ただし、$-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$)

$$I=\int_{-A}^{+A}\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}} \qquad \text{(3-5-10)}$$

（解答例） ヒントに従って、$x=A\sin\theta \quad (-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2})$ と置くと、$dx=A\cos\theta d\theta$ なので、

$$I=\int_{-A}^{+A}\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{A\cos\theta}{\sqrt{A^2-A^2\sin^2\theta}}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}d\theta=\pi$$

(2) (3-5-9)式　$T'=\sqrt{2m}\int_A^B\frac{dx}{\sqrt{(E-U(x))}}$　を計算して、周期が $T'=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ と求まることを確かめよ。

（解答例） $E=\frac{1}{2}kA^2, U(x)=\frac{1}{2}kx^2$ を代入し、積分の下限、上限を-A, +A と置くと

$$T'=\sqrt{2m}\int_{-A}^{+A}\frac{dx}{\sqrt{(\frac{1}{2}k(A^2-x^2)}}=\frac{\sqrt{2m}\sqrt{2}}{\sqrt{k}}\int_{-A}^{+A}\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

ここで、最後のところは(1)の結果（3-5-10)式=πを使った。上の結果は、運動方程式から求めた値と同じになる。

演習7

1. $\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}=\dfrac{d(\dot{r}\,\mathbf{e}_r+r\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi)}{dt}$ を計算し、２次元極座標で、加速度の r成分と φ 成分が (4-2-10)、(4-2-11)式

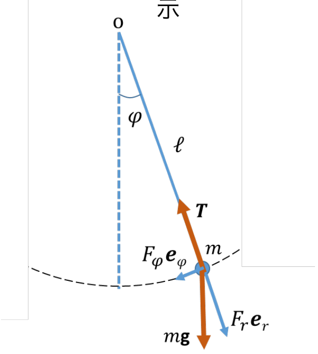
$a_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2$ 、$a_\varphi=\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})=r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}$　となることを示せ。

（解答例） (4-2-8)式を使う。$\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}=\dfrac{d(\dot{r}\,\mathbf{e}_r+r\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi)}{dt}=\ddot{r}\,\mathbf{e}_r+\dot{r}\,\dot{\mathbf{e}}_r+\dot{r}\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi+r\ddot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi+r\dot{\varphi}\,\dot{\mathbf{e}}_\varphi$

$$=\ddot{r}\,\mathbf{e}_r+\dot{r}\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi+\dot{r}\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi+r\ddot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi-r\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_r=(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r+(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi=(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi$$

2. 質量の無視できる長さ l の糸の先端に質量 m の質点がつけられた単振子がある。糸の張力をT、重力加速度を g として以下の設問に答えよ。摩擦などは無視できるとする。

（1）2次元極座標での単振子の運動方程式を書け（動径 r 方向、偏角 φ 方向の両方を示せ。ただし、φ は鉛直下方からの角度）。



（解答例） r 方向　$F_r=ma_r=m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=mg\cos\varphi-T$　(演7-1)

φ 方向　$F_\varphi=ma_\varphi=m(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})=-mg\sin\varphi$　(演7-2)

r やφ が増加する方向が正の方向である事に注意せよ。$r=l=\text{const}.$ なので、$\dot{r}=\ddot{r}=0$ となる。これを上の式に入れると、

r 方向　$-ml\dot{\varphi}^2=mg\cos\varphi-T$　(演7-3)

φ 方向　$ml\ddot{\varphi}=-mg\sin\varphi$　(演7-4)

となる。

（2）$\varphi\ll 1$の時、$\sin\varphi\sim\varphi$ と近似できる。これを使い、$\varphi\ll 1$（微小振動）の場合、偏角方向の方程式は単振動の方程式と同等になる事を示し、周期を求めなさい。

（解答例） $\sin\varphi\sim\varphi$ を上の(演7-4)式に適用すると、　$\ddot{\varphi}=-\dfrac{g}{l}\sin\varphi\sim-\dfrac{g}{l}\varphi$　(演7-5)

これは、単振動の方程式 $\ddot{x}=-\dfrac{k}{m}x$ と同じ形をしている。よって式（演7-5）の解は、単振動の方程式の解

$x(t)=a\cos\omega t+b\sin x\omega t$ 、$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ と記号が違うだけなので、$\varphi(t)=a\cos\omega t+b\sin x\omega t$、$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ となる。これより、周期 $T'=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ と求まる。

（3）求めた周期は糸の長さだけで決まり質量や振幅によらない（等時性）ことを確かめよ。

（解答例） 求めた周期の式より、周期は糸の長さ（と重力加速度）だけで決まる事がわかる。

3. 極座標でのポテンシャルと力ベクトルの関係 (4-3-8)式を使い、万有引力のポテンシャル　$U(r)=-\dfrac{GMm}{r}$ から万有引力が　$\mathbf{F}(\mathbf{r})=-\dfrac{GMm}{r^2}\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ となることを示しなさい

（解答例） $U(r)$は r のみの関数なので、(4-3-8)式より、F_r 成分だけを持つことがわかる。$F_r=-\dfrac{\partial U}{\partial r}=-\dfrac{GMm}{r^2}$. よって、$\mathbf{F}=-\dfrac{GMm}{r^2}\mathbf{e}_r=-\dfrac{GMm}{r^2}\dfrac{\mathbf{r}}{r}$.　($\mathbf{e}_r=\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ に注意せよ）。

4. 3次元極座標の無限小体積要素が $dV=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$ と表せることを使い、極座標の積分から、半径の球の体積が $\dfrac{4\pi}{3}a^3$ であることを求めよ。

（解答例） 球の体積 $V=\displaystyle\int_0^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(r^2\sin\theta)dr\,d\theta\,d\varphi=\int_0^a r^2dr\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{4\pi}{3}a^3$